

# De L'indice de Cyrtose des Courbes en Statistique Granulometrique

Charlier, Roger H.  
Charlier, Patricia S.

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 11, 1959,  
S.82-86



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

# DE L'INDICE DE CYRTOSE DES COURBES EN STATISTIQUE GRANULOMETRIQUE

Par Roger H. Charlier et Patricia S. Charlier

Vorgelegt von Herrn A. Cailleux

(Eingegangen am 12. September 1959)

*Summary: The authors show the possibility of computing kurtosis in a manner which parallels Wentworth's computation of skewness. They offer for further consideration various suggestions on the possible statistical and sedimentological advantages of this "new" coefficient. Besides the test or check value, the method permits a greater spread of kurtic value in the central area and in addition would perhaps permit a better differentiation between sediments whose frequency size distribution is close to gaussian.*

**Übersicht:** Dieser Beitrag bringt einen Vorschlag, die Kurtose nach einer neuen Methode zu berechnen. Die Vorteile dieser Methode werden vom statistischen und geologischen Gesichtspunkt aus kurz besprochen. Vielleicht bietet diese neue Berechnung der Kurtose die Möglichkeit, die Sedimente leichter zu differenzieren.

Dans une publication assez récente *Inman* (1952) soulignait les difficultés réelles d'interprétation de résultats statistiques publiés dans les travaux sédimentologiques; ces difficultés résultent de la grande diversité des paramètres employés. Mais il nous semble qu'elles s'accroissent encore vu les méthodes de calcul usitées pour certains coefficients. Nous n'avons aucunement l'intention de compliquer encore plus l'analyse de résultats d'ordre granulométrique, mais au cours de nos travaux statistiques sur les sédiments de la côte Est des Etats-Unis (*Charlier*, 1958, 1958a, 1958b) nous avons eu l'occasion d'examiner les mérites relatifs du calcul des coefficients d'asymétrie et de kurtosis.

Il nous a semblé, à la suite de ces comparaisons que certains calculs pourraient être omis et que le coefficient de convexité que nous proposons, basé sur le coefficient d'asymétrie de *Wentworth* (1929) est plus aisé à calculer, et en outre possède de sérieux avantages de précision, particulièrement en granulométrie.

Dans une distribution symétrique d'un sédiment, la somme des écarts à la moyenne arithmétique est évidemment nulle et il en est de même pour tout moment d'ordre impair; donc,

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^3 f(x) \cdot dx$$

et  $\mu_3 = 0$ .

Pour rendre cet indice indépendant de l'unité concrète mesurant la variable, on exprime la valeur des abscisses en multiples de la déviation standard ( $\sigma$ ), d'où:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \bar{x})^3}{(\sigma_\varphi)^3} f(x) \cdot dx \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_\varphi} \right)^3 f(x_i) \\
 &= \frac{\mu_3}{\sigma_\varphi^3}
 \end{aligned}$$

Pour le cas d'une courbe symétrique ou gaussienne  $\mu_3 = 0$ , d'où évidemment le coefficient d'asymétrie

$$\gamma_1 = 0$$

Il s'agit bien là en effet du coefficient d'asymétrie courant (Billy, 1954), représenté par la formule

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_\varphi^3}$$

calculé en unités phi ( $\varphi$ ) en granulométrie (Krumbein et Pettijohn, 1938).

Certains auteurs (Krumbein, op. cit.) proposent de ne prendre que la moitié de ce coefficient et les tableaux qu'ils présentent correspondent à un coefficient d'asymétrie tel que

$$Sk = \frac{\mu_3}{2\sigma_\varphi^3} = \frac{\gamma_1}{2}$$

Wentworth (1929), par contre, tenant compte que dans la formule donnant  $\gamma_1$  ou  $Sk$  la déviation standard est mise au cube, extrait la racine cubique de la fraction, ramenant donc la déviation standard à sa valeur réelle et exprime l'asymétrie d'une courbe par le coefficient

$$Sk_w = \frac{\sqrt[3]{\mu^3}}{\sigma_\varphi}$$

Nous avons appliqué ce même raisonnement à l'étude du quatrième moment qui nous fournit le coefficient de cyrtose de la courbe<sup>1)</sup>. Soit celui-ci  $\mu_4$ ,

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^4 f(x) \cdot dx$$

<sup>1)</sup> Les auteurs n'ont pas voulu faire usage du terme de «coefficient d'aplatissement» recommandé récemment (1957) par la Commission Internationale de Statistique et lui préfèrent le terme de coefficient de convexité ou même cyrtose, car il prête à confusion. En effet, en géologie sédimentologique, le coefficient d'aplatissement est une mesure morphoscopique reconnue dont l'origine est due à Wentworth et à Cailleux. Il ne s'agit pas ici d'une mesure morphoscopique mais de l'allure d'une courbe statistique. A. Cailleux fait en outre remarquer qu'en grec *kurtosis* veut dire convexité, bosse et non pas aplatissement et, qu'en conséquence, il y a là, dans le Dictionnaire Statistique International publié par les soins de l'UNESCO, un lapsus évident.

d'où, lorsque l'on rend l'indice indépendant de l'unité concrète de la variable en l'exprimant en fonction des multiples de la déviation standard,

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \bar{x})^4}{4} \cdot f(x) \cdot dx \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(x_i - \bar{x})}{\sigma_\varphi} \right|^4 \cdot f(x_i) \\ &= \frac{\mu_4}{\sigma_\varphi^4}\end{aligned}$$

Bref, le coefficient de cyrtose ou, pour employer le terme anglo-saxon, la kurtosis vaut (Billy, op. cit.)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_\varphi^4}$$

Pearson a proposé un autre coefficient logique  $\gamma_2$  de valeur

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

car lorsque  $\beta_2 = 3$  la courbe est normale<sup>2)</sup> et on a de la sorte un coefficient de cyrtose ( $\gamma_2$ ) nul pour une courbe gaussienne normale.

Ce coefficient fait toutefois usage de la déviation standard portée à la quatrième puissance. Pourquoi ne pas suivre l'exemple de Wentworth pour le coefficient d'asymétrie et ne pas toucher à la déviation standard ? Il suffirait de prendre la racine quatrième de  $\beta_2$ .

Le coefficient de convexité s'exprimerait dès lors par la simple relation

$$k_c = \frac{\sqrt[4]{\mu_4}}{\sigma_\varphi}$$

et le caractère cyrtique de la courbe s'exprimerait par les valeurs suivantes

lorsque  $k_c < 1.3175$  la courbe sera *platycurtique*, c'est-à-dire évasée;

lorsque  $k_c = 1.3175$  la courbe est *gaussique*;

lorsque  $k_c > 1.3175$  la courbe sera *leptocurtique*, c'est-à-dire aiguë.

Quels avantages peut-on trouver dans l'emploi de cette nouvelle manière de calculer la convexité ? Tout d'abord nous avons une opération en moins, éliminant le passage de  $\beta_2$  à  $\gamma_2$ ; en second lieu nous éliminons la nécessité de faire usage de nombres négatifs, toujours susceptibles d'engendrer erreur et parfois même confusion. Si par contre nous perdons l'avantage d'avoir un coefficient nul pour une courbe gaussienne, il n'est guère plus difficile de se rappeler que le coefficient d'aplatissement de celle-ci vaut 1.3175 que de rappeler qu'il faut soustraire 3 de  $\beta_2$  pour obtenir  $\gamma_2$ .<sup>3)</sup>

<sup>2)</sup> Pour une courbe normale

$$\mu_4 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot dx \quad \mu_4 = \frac{4!}{2^{1/2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)!} \cdot \sigma^4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot (2!)^2} \cdot \sigma^4 = 3 \sigma^4$$

d'où en posant  $k_2 = \mu_4/\sigma^4$  on a  $k_2 = 3$ .

<sup>3)</sup> Si l'on désire un coefficient de convexité nul pour une courbe gaussienne, il suffit de soustraire 1.3175 de  $k_c$ .

Nous avons collecté au hasard une série d'échantillons des plages de Long Island (N. Y.), tant de la côte nord que du littoral sud et nous avons calculé leur coefficients de convexité (cyrtose) d'après les deux méthodes (Tableau 1).

Tableau 1 : Valeurs des coefficients de convexité calculés en  $\gamma_2$  et en  $k_c$ , de spécimens récoltés sur les littoraux de Long Island, N. Y.

No. de l'échantillon	Coefficient de convexité $\gamma_2$	Kurtosis $k_c$
1	1.684	1.46
2	0.235	1.327
4	2.104	1.503
5	7.21	1.808
6	1.842	1.484
7	0.273	1.345
8	-0.534	1.248
9	2.110	1.504
10	1.144	1.43
11	-0.966	1.20
12	1.015	1.413
13	1.602	1.454
14	-0.516	1.257
15	-0.640	1.238
16	4.758	1.65
19	-1.014	1.19
23	1.296	1.44
24	6.54	1.77
25	1.036	1.415
26	1.490	1.45

Nous avons ensuite établi deux graphiques comparatifs de ces coefficients de telle sorte que le plus grand et le plus petit correspondent dans chacun d'eux aux extrémités du graphique.

De ce graphique (fig. 1) nous croyons bien pouvoir déduire que, tandis que les « queues » de la distribution des coefficients de cyrtose coïncident dans les deux systèmes et que l'ordre de succession de tous les coefficients est identique dans l'un et l'autre, on observe un étalement plus grand des valeurs de  $k_c$  pour les valeurs centrales, c'est-à-dire celles qui se groupent le plus près de la valeur du coefficient pour une courbe normale.

Ceci permet de mieux observer la différence existant parmi les distributions quasi normales; comme la distribution des sédiments tend à se rapprocher d'une courbe normale, toute déviation de la norme s'observe plus facilement dans le système  $k_c$ .

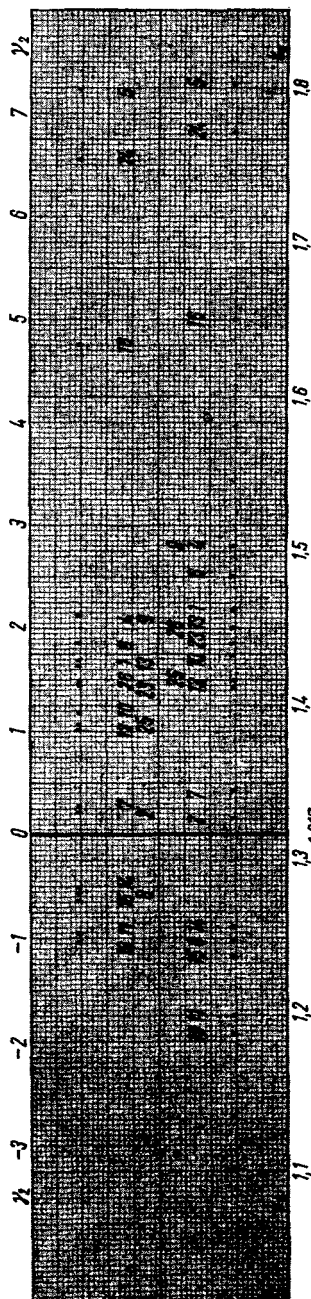


Fig. 1. Distribution comparée des coefficients de cyrtose  $\gamma_2$  et de convexité  $k_c$  pour un échantillonnage de sédiments pris sans choix

Certains de nos collègues nous font également remarquer que le calcul que nous proposons constitue en outre un excellent moyen de vérification du coefficient de cyrtose calculé en système  $\gamma_2$ . Mais à part cette qualité statistique pure, il convient peut-être de rappeler que si l'emploi de la «cyrtose» est encore toujours assez rare — sauf aux Etats-Unis —, celle-ci semble bien liée à l'action sélective de l'agent géologique (ou des agents géologiques) qui ont construit (ou remanié) le dépôt étudié. Le remaniement possible ou le processus de sélection est bien moins apparent dans les courbes quasi-normales, et c'est précisément pour celles-ci que les valeurs de  $k_c$  sont plus étalées que celles de  $\gamma_2$ ; il en résulte donc peut être que le coefficient  $k_c$  permettrait de mieux déceler une variation de l'agent sélectif parmi des dépôts qui semblent quasi identiques.

Cette communication ne constitue que la suggestion d'une méthode de calcul nouvelle et des indications quant à ses avantages probables tant du point de vue statistique que granulométrique.

### Références bibliographiques

- Atlas, S. et Charlier, R.* (1958): Nearshore sediments on Long Island, N. Y. Bull. New Jersey Academy of Sc., Vol. 3, No. 1 (p. 10); *ibid.*, Vol. 3, No. 3 (p. 4—6).
- Billy, G.* (1954): Etude des courbes normales de dispersion. Paris, Centre de documentation universitaire.
- Cailleux, A.* (1945): Distinction des galets marins et fluviaux. Bull. Soc. Géol. Fr., 5. s., t. 15, p. 375—404, 10 fig.
- Charlier, R.* (1958a): Contribution à l'étude comparative des littoraux septentrional et méridional de Long Island, N. Y. Paris (Université de), Laboratoire de géologie marine; Somerville (New Jersey), Maplegrove Press. II + 417 p.
- Charlier, R. et Atlas, S.* (1958b): Etude granulométrique et roentgenscopique de quelques sédiments littoraux de Long Island, N. Y. Zeitschrift für Geomorphologie, Mai 1959 (p. 142—8 + 4 tabl.).
- Inman, D.* (1952): Measures for describing the size distribution of sediments. La Jolla (Calif.), Scripps Institution of Oceanography.
- Krumbein, W. et Pettijohn, F.* (1938): Manual of Sedimentary Petrography. New York, Appleton-Century-Crofts.
- Wentworth, C.* (1929): Method of computing mechanical composition types in sediments. Bull. Geol. Soc. Amer., Vol. 40 (p. 771—790); (1922): Shapes of beach pebbles. U. S. Geol. Surv. Prof. Paper, 131 C, p. 75—83.